options MP COMPOSITION DE MATHEMATIQUES M - P (3 h)

PREMIER PROBLEME

Les études de (Question 1), (Question 2), (Questions 3,4 début de 5) sont indépendantes.

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{R}$; E le $\mathbb{C}$ - espace vectoriel correspondant.

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur $\mathbb{R}$; E' le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel correspondant.

1) Trouver dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ les solutions de l'équation différentielle du 4ème ordre, d'inconnue y :

$$y^{(4)} + 4\,y = 0$$

On admettra que l'ensemble des solutions est un sous-espace de E, de dimension 4.

On cherchera d'abord les solutions y de la forme :

$$y(t) = e^{rt} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{C}$$

2) Soit la matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

considérée comme définissant un endomorphisme du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathbb{C}^4$, rapporté à sa base canonique.

Calculer dans $\mathbb{C}$ les valeurs propres de A.

En déduire les vecteurs propres correspondants de $\mathbb{C}^4$.

Calculer A^{-1}.

3) On considère maintenant l'espace vectoriel E' des fonctions réelles.

Soient f_1 , f_2 , f_3 , f_4 les quatre fonctions de E' définies par :

$f_1(t) = e^t \cos t$ $\quad f_2(t) = e^t \sin t$ $\quad f_3(t) = e^{-t} \cos t$

$f_4(t) = e^{-t} \sin t$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$

E'_1 est le sous espace de E' engendré par $\{f_1 , f_2 , f_3 , f_4\}$.

Montrer que $\{f_1 , f_2 , f_3 , f_4\}$ forment un système libre de E'.

$\mathcal{B} = (f_1 , f_2 , f_3 , f_4)$ est donc une base de E'_1.

4) Soit (ϕ_n) la famille d'applications, évidemment linéaires :

$$E'_1 \xrightarrow{\phi_n} E'$$

$$g \longmapsto g^{(n)}$$

$g^{(n)}$ dérivée d'ordre n de g.

Montrer que l'image de ϕ_n appartient à E'_1.

On peut donc restreindre ϕ_n à une application de E'_1 dans E'_1, soit un endomorphisme de E'_1.

Soit Ψ_n cet endomorphisme.

5) Soit l'endomorphisme Ψ_4 de E'_1.

$$E'_1 \xrightarrow{\Psi_4} E'_1$$

$$g \longmapsto g^{(4)}$$

Ecrire la matrice de Ψ_4 rapportée à la base $\mathcal{B}$ définie précédemment.

Comparer le résultat obtenu avec les résultats de la question 1°.

Que représente E'_1 pour l'équation de la question 1° ?

6) Les endomorphismes Ψ_n sont-ils des automorphismes ?

.../...

ECOLE DE L'AIR 1983

7°) Former la matrice de Ψ_1 rapportée à la base $\mathcal{B}$:

$$E_1' \xrightarrow{\Psi_1} E_1'$$

$$E \longmapsto g'$$

Que donne la matrice A^{-1} (définie précédemment au 2°)) pour les fonctions de E_1' ?

Interpréter les valeurs propres, les vecteurs propres de la matrice A (on pourra faire intervenir E_1, sous espace de E (donc $\mathbb{C}$ - espace) engendré toujours par $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$) .

X

X X

DEUXIEME PROBLEME

Dans l'espace Euclidien de dimension 3, (o,xyz) est un repère orthonormé. On donne deux droites D et D' :

$$D \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad D' \begin{cases} z = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Soit P_λ la famille de plans passant par D :

$$P_\lambda \left[\lambda x - y + z = 0\right] \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

A tout plan P_λ, on associe le plan P'_λ passant par D' et orthogonal à P_λ.

Soit Δ_λ l'intersection de P_λ et P'_λ

c'est-à-dire : $\Delta_\lambda = P_\lambda \cap P'_\lambda$

On coupe Δ_λ par le plan Q mené par O orthogonal à D.

On obtient ainsi un point $M(\lambda)$:

$$M(\lambda) = P_\lambda \cap P'_\lambda \cap Q$$

1°)Calculer les coordonnées de $M(\lambda)$.

Montrer que si λ parcourt $\mathbb{R}$, $M(\lambda)$ se déplace sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2°) Montrer que toutes les droites Δ_λ, quand λ parcourt $\mathbb{R}$, se trouvent sur une surface du 2° degré, dont on donnera l'équation.

Soit $F(x\ y\ z) = 0$ cette équation ;

Soit $G(x\ y\ z) = 0$ l'équation du plan Q ;

Montrer qu'on peut choisir (u,v,w) pour que l'équation

$F(x,y,z) + (ux + vy + wz)\ G(x\ y\ z) = 0$

soit l'équation d'une sphère.

Que retrouve-t-on ?

3°) Soit l'ensemble des droites de l'espace

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha z + p \\ y &= \beta z + q \end{aligned}\right\} \quad (\alpha,\beta,p,q) \in \mathbb{R}^4$$

Ecrire les conditions pour qu'une telle droite rencontre toutes les droites Δ_λ.

Ces conditions permettent d'exprimer p,q,β, en fonction de α, donc de définir une famille de droites (D_α).

Former l'équation de la surface du 2° degré sur laquelle se déplace D_α quand α parcourt $\mathbb{R}$.

Que retrouve-t-on ?

764